

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad h = \frac{T-t_0}{N}$$

→ Θ-Método: $x_{i+1} = x_i + h((1-\Theta)f(t_i, x_i) + \Theta f(t_{i+1}, x_{i+1}))$. Si $\Theta=0 \Rightarrow$ Método de Euler explícito ($O(h)$), si $\Theta=1 \Rightarrow$ Método de Euler implícito ($O(h)$).
 si $\Theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Método del Trapecio ($O(h^2)$).

→ Métodos de Taylor de orden p: $x_{i+1} = x_i + hT_p(t_i, x_i, h)$, con $T_p(t_i, x_i, h)$ polinomio de Taylor de orden p: $T_p(t, \xi, h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t, \xi)$.

→ Métodos de Runge-Kutta de 2 etapas: $x_{i+1} = x_i + h\phi(t_i, x_i, h)$, con $\phi(t, \xi, h) = \frac{1}{2} C_k F_k(t, \xi, h)$, $F_k(t, \xi, h) = f(t + b_k h, \xi + h \sum_{j=1}^2 a_{kj} F_j(t, \xi, h))$.

• R-K de 2 etapas y orden 2:

* Método de Euler Modificado: $x_{i+1} = x_i + h f(t_i + \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2} f(t_i, x_i))$.

* Método de Heun: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{4} (f(t_i, x_i) + 3f(t_i + \frac{1}{3}h, x_i + \frac{2}{3}h f(t_i, x_i)))$.

* Método de Euler Mejorado: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_i + h f(t_i, x_i)))$.

• R-K de 3 etapas y orden 3: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{9} (2F_1 + 3F_2 + 4F_3)$, con $F_1 = f(t_i, x_i)$, $F_2 = f(t_i + \frac{1}{3}h, x_i + \frac{1}{3}h F_1)$, $F_3 = f(t_i + \frac{2}{3}h, x_i + \frac{2}{3}h F_1)$.

• R-K de 4 etapas y orden 4: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{8} (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$, con $F_1 = f(t_i, x_i)$, $F_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}h F_1)$, $F_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}h F_2)$, $F_4 = f(t_i + h, x_i + h F_3)$.

Tableau de
Butcher:

b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1r}
b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2r}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
b_r	a_{r1}	a_{r2}	$\dots$	a_{rr}
	c_1	c_2	$\dots$	c_r

→ Método del Punto Medio: $x_{i+2} = x_i + 2h f(t_{i+1}, x_{i+1})$ ($O(h^2)$).

→ Método de Simpson: $x_{i+2} = x_i + \frac{h}{3} (f(t_i, x_i) + 4f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_{i+2}, x_{i+2}))$ ($O(h^4)$).

→ Métodos de Adams-Bashforth de 2 pasos: $x_{i+2} = x_{i+1} + h \sum_{k=0}^{1} \beta_k f_{i+k}$.

• A-B de 2 pasos: $x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{2} (3f_{i+1} - f_i)$.

• A-B de 3 pasos: $x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{12} (23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i)$.

• A-B de 4 pasos: $x_{i+4} = x_{i+3} + \frac{h}{24} (55f_{i+3} - 59f_{i+2} + 37f_{i+1} - 9f_i)$.

→ Métodos de Adams-Moulton de $r \geq 1$ pasos: $x_{i+r} = x_{i+r-1} + h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}$.

• A-M de 2 pasos: $x_{i+2} = x_{i+1} + \frac{h}{12} (5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i)$.

• A-M de 3 pasos: $x_{i+3} = x_{i+2} + \frac{h}{24} (9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i)$.

• A-M de 4 pasos: $x_{i+4} = x_{i+3} + \frac{h}{720} (251f_{i+4} + 646f_{i+3} - 264f_{i+2} + 106f_{i+1} - 19f_i)$.

→ Métodos de Nyström de $r \geq 2$ pasos: $x_{i+r} = x_{i+r-2} + h \sum_{k=0}^{r-1} \beta_k f_{i+k}$.

→ Métodos de Milne de $r \geq 2$ pasos: $x_{i+r} = x_{i+r-2} + h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}$.

• Milne de 2 pasos: $x_{i+2} = x_i + 2h f_{i+1}$.

→ (p, σ)-Método, método lineal de r pasos: $\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{i+k} = h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{i+k}$; $\rho(z) = \sum_{k=0}^r \alpha_k z^k$, $\sigma(z) = \sum_{k=0}^r \beta_k z^k$.

• Caracterización de la consistencia: (p, σ)-Método consistente $\Leftrightarrow \rho(1) = 0$ y $\rho'(1) = \sigma(1)$.

• Caracterización de la convergencia: (p, σ)-Método de orden p $\in \mathbb{N} \Rightarrow c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$, con $c_0 = \rho(1)$, $c_i = \rho'(1) - \sigma(1)$, $c_j = \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^j (k\alpha_k - j\beta_k) k^{j-1}$, $j = 2, 3, \dots, p$.

• $\rho(z)$ cumple condición de Dahlquist si sus raíces $\{z_1, \dots, z_r\} \in \mathbb{C}$ verifican: a) $|z_i| \leq 1 \forall i$; b) si $|z_i| = 1 \Rightarrow z_i$ es raíz simple.

• (p, σ)-Método estable $\Leftrightarrow$ verifican la condición de Dahlquist.

• Error local de truncamiento: $\tau_{i+r}(h) = \frac{1}{h\sigma(1)} \sum_{k=0}^r (\alpha_k x(t_{i+k}) - h\beta_k f(t_{i+k}, x_{i+k}))$.

• (p, σ)-Método convergente $\Leftrightarrow$ consistente y 0-estable.

• Región de estabilidad del (p, σ)-Método: $R = \{z \in \mathbb{C} : |\rho(\tilde{h})| < 1, j = 1, \dots, r\}$, con $\{z_1(\tilde{h}), \dots, z_r(\tilde{h})\}$ raíces del polinomio de estabilidad $\pi(z, \tilde{h}) = \sum_{k=0}^r (\alpha_k - \tilde{h}\beta_k) z^k = \rho(z) - \tilde{h}\sigma(z)$.

• (p, σ)-Método A-estable si R contiene al semiplano complejo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

• La región de estabilidad de un método multigrado lineal explícito está acotada.

• Segunda Barrera de Dahlquist: El orden de un método multigrado lineal implícito A-estable es ≤ 2 .

→ Método de Predicción-Corrección: $P(EC)^m E$.

• Sean $p, p^* \in \mathbb{N}$, $f \in C^n([t_0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y Lipschitziana en la segunda variable. Si el método P tiene orden p^* y el método E orden $p \Rightarrow$ el orden de $P(EC)^m E$ es $\hat{p} = \min\{p, p^* + 1\}$. En general, $P(EC)^m E$ tiene orden $\hat{p} = \min\{p, p^* + m\}$.

→ Lema de cotación: Si $\{y_i\}_{i=0}^\infty$ es sucesión de números reales no negativos tal que $y_{i+1} \leq (1+A)y_i + B$, $i=0, \dots$ con $A > 0, B \geq 0 \Rightarrow$
 $y_i \leq (1+A)^i y_0 + \frac{(1+A)^i - 1}{A} B$ para $i=0, 1, \dots$. En particular, $y_i = e^{iA} y_0 + \frac{e^{iA} - 1}{A} B$ para $i=0, 1, \dots$.

$$(PC) \begin{cases} x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ x'(T) = \beta \end{cases}$$

$$(PC)_0 \begin{cases} x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = 0 \\ x(T) = 0 \end{cases}$$

→ Método de Tiro: $y(t; \gamma) = x(t)$; $y'(T; \gamma) = \beta$.

$$\begin{cases} y''(t) = p(t)y'(t) + q(t)y(t) + r(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \gamma \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

$$\begin{cases} y_1''(t) = p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) + r(t) \\ y_1(t_0) = \alpha \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

$$\begin{cases} y_2''(t) = p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) \\ y_2(t_0) = 0 \\ y_2'(t_0) = 1 \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

↳ Solución: $y(t; \gamma) = y_1(t) + \gamma y_2(t)$, $t \in [t_0, T]$.

- Teorema de la Alternativa de Fredholm: $p, q \in C([t_0, T])$. Se tiene la siguiente alternativa: a) 0 (PC) tiene como única solución la trivial con cuyo caso (PC) tiene una única solución $\forall z \in C([t_0, T])$. b) 0 (PC) tiene solución no trivial (en cuyo caso (PC) tiene infinitas soluciones si $y_1(t)$ verifica $y_1(T) = \beta$ o no tiene solución en caso contrario).

→ Método de diferencias finitas: Sea (PC) y supongamos que su solución x tiene regularidad $x \in C^4([t_0, T])$. Desarrollamos por Taylor $x(t_{i-1})$ y $x(t_{i+1})$ y despejando llegamos a que $x''(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} x^{(4)}(\theta_i)$ y $x'(t_i) = \frac{x(t_i) - x(t_{i-1}))}{h} - \frac{h}{2} x^{(3)}(\nu_i)$. Sustituyendo $x''(t_i)$ y $x'(t_i)$ en (PC) y agrupando, separando los casos $i=1$ e $i=N$ del resto, obtenemos:

$$\begin{cases} a_1 x_1 - c_1 x_2 = -\tau_1 h^2 + \alpha \theta_1 - \frac{h^4}{12} \sigma_1(h) \\ -b_i x_{i-1} + a_i x_i - c_i x_{i+1} = -\tau_i h^2 - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h), \quad i=2, \dots, N-1 \\ -b_N x_{N-1} + a_N x_N = -\tau_N h^2 + \beta \theta_N - \frac{h^4}{12} \sigma_N(h) \end{cases}$$

donde: $a_i = 2 + q_i h^2$; $b_i = 1 + \frac{p_i}{2} h$,

$c_i = 1 - \frac{p_i}{2} \sigma_i(h)$; $\sigma_i(h) = x^{(4)}(\theta_i) - 2x^{(3)}(\nu_i) p_i$.

Es decir, $A_h x = b_h + h^2 z(h)$, siendo:

$$A_h = \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & & & \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{N-1} & a_{N-1} & -c_{N-1} \\ & & & -b_N & a_N \end{pmatrix}; \quad b_h = \begin{pmatrix} \tau_1 h^2 \\ \vdots \\ \tau_N h^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \theta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \theta_N \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}; \quad z(h) = -\frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} \sigma_1(h) \\ \vdots \\ \sigma_N(h) \end{pmatrix}.$$

- $A \in M_N$ es de diagonal estrictamente dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}|$, $\forall i=1, \dots, N$.
- Toda matriz de diagonal dominante es invertible.
- Sean $p, q, r \in C([t_0, T])$ con $q_{\min} = \min_{t \in [t_0, T]} q(t)$. Si $0 < h < \frac{2}{p_{\min}} \Rightarrow A_h$ es invertible.
- Si $\|B\| < 2 \Rightarrow A = (2I + B)$ es invertible y $\|A^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{2 - \|B\|}$.